214

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Soit E, F deux evn de dimension finie.

I] Théorème des fonctions implicites

1] Par le théorème du point fixe de Picard

VI.1 [ElAm]

Théorème 1 : (du point fixe de Picard) Soit F evn de dimension finie, $Y \subseteq F$ fermé et $\Phi : Y \to Y$ application k-contractante.
Alors : Φ admet un unique point fixe.

Exemple 2 : $\Phi(x) = \sqrt{x}$ sur $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ est contractante et a pour unique point fixe 0.

Corollaire 3 : (du point fixe à paramètre) Soit E, F evn de dimension finie, $A \subseteq E$ et $Y \subseteq F$ fermé, $\Phi : A \times Y \to Y$ tq : $\forall y \in Y$, $\lambda \mapsto \Phi(\lambda; y)$ est continue et $\exists k \in [0, 1[\mid \forall \lambda \in A$, $y \mapsto \Phi(\lambda; y)$ est k-contractante.
Alors : $\forall \lambda \in A$, $\exists! y_\lambda \in Y \mid \Phi(\lambda; y_\lambda) = y_\lambda$ et $\lambda \mapsto y_\lambda$ continue sur A.

2] Approche d'une courbe par le graphe d'une fonction

VI.2 [ElAm]

Remarque 4 : Soit $f(x;y) = x^2 + y^2 - 1$. Au voisinage de $(a;b) \neq \{-1;0\}, \{1;0\}$, $f(x; \varphi(x)) = 0$ ssi $\varphi(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Théorème 5 : (des fonctions implicites) Soit $\Omega \subseteq E \times F$ ouvert, $f : \Omega \to F$ application de classe $\mathcal{C}^1$ et $(x_0; y_0) \in \Omega$ tel que $f(x_0; y_0) = 0$ et $\partial_y f(x_0; y_0)$ est inversible.
Alors : $\exists U \in \mathcal{V}_{x_0} \mid \exists V \in \mathcal{V}_{y_0} \mid \exists \varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\begin{cases} (x;y) \in U \times V \\ f(x;y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in U \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

De plus, $\forall x \in U$, $d_x \varphi = -(\partial_y f(x; \varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x; \varphi(x))$

Exemple 6 : Pour $f(x;y) = x^2 + y^2 - 1$, $\partial_y f(x;y) = 2y$ d'où l'existence d'une fonction implicite ssi $y \neq 0$.

VI.2

Théorème 7 : Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $(a_1; \dots; a_n; b) \in \Omega$ tel que : $f(a_1; \dots; a_n; b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1; \dots; a_n; b) \neq 0$
Alors : $\exists U \in \mathcal{V}_{(a_1; \dots; a_n)} \mid \exists V \in \mathcal{V}_b \mid \exists \varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que :
(i) $\forall (x_1; \dots; x_n) \in U$, $\forall y \in V$, $f(x_1; \dots; x_n; y) = 0 \Rightarrow y = \varphi(x_1; \dots; x_n)$
(ii) $\forall (x_1; \dots; x_n) \in U$, $f(x_1; \dots; x_n; \varphi(x_1; \dots; x_n)) = 0$
(iii) Si $(x_1; \dots; x_n; y) \in U \times V$, alors $\partial_y f(x_1; \dots; x_n; y) \neq 0$.
De plus, $\forall x = (x_1; \dots; x_n) \in U$, $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1; \dots; x_n) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x; \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x; \varphi(x))}$

[ElAm]

Exemple 8 : Si $E = F = \mathbb{R}$, alors l'équation $f(x;y) = 0$ est l'équation implicite d'une courbe de $\mathbb{R}^2$. Cela peut s'écrire $y = \varphi(x)$ au voisinage d'un point $(a;b)$ tel que $\partial_y f(a;b) \neq 0$.

Remarque 9 : La condition $\partial_y f(x_0; y_0)$ inversible est suffisante mais pas nécessaire à la résolubilité de $f(x;y) = 0$. $f(x;y) = x - y^3$ a pour solution $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ qui n'est pas $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 car non-dérivable en 0.

Remarque 10 : La condition $\partial_y f(x_0; y_0) \neq 0$ revient à dire que la tangente à la courbe de niveau $f(x;y) = f(x_0; y_0)$ en $(x_0; y_0)$ n'est pas verticale.

II] Théorèmes importants qui en découlent

1] Théorèmes d'extrema sous contraintes

VI.3 [ElAm]

Théorème 11 : (des multiplicateurs de Lagrange) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f, g \in \mathcal{C}^1(U; \mathbb{R})$, $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ tq : $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ tel que $d_a g \neq 0$.
Alors : $d_a f = \lambda d_a g$

Remarque 12 : Le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange.

Exemple 13 : Le minimum et maximum de $f(x;y) = x + y$ restreint à $\Gamma = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$ sont atteints en $(-2^{-\frac{1}{4}}; -2^{-\frac{1}{4}})$ et $(2^{-\frac{1}{4}}; 2^{-\frac{1}{4}})$.

VI.3 [El Am]

Théorème 14: (des multiplicateurs de Lagrange) Soit $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ouvert, $f:U\to\mathbb{R}$, $g:U\to\mathbb{R}^p$ de classes $\mathcal{C}^1$, $\Gamma=g^{-1}(\{0\})$ tel que $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a\in\Gamma$ tel que $d_a g$ surjective.
Alors: $\exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p \mid d_a f=\lambda_1 d_a g_1+\dots+\lambda_p d_a g_p$

Exemple 15: Pour $f(x;y;z)=x+z$, $g(x;y;z)=(x^2+y^2+z^2-1;z-y)$, f admet d'unique maximum et minimum atteints en $(\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{\sqrt{6}}{6})$ et $(-\frac{\sqrt{6}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{6};-\frac{\sqrt{6}}{6})$.

2) Théorèmes d'inversion

VI.4 [El Am]

Définition 16: Soit $k\in\mathbb{N}^*$, $U\subseteq E$ ouvert, $V\subseteq F$ ouvert. On dit que $f:U\to V$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si:
(i) f est bijective de U dans V
(ii) f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U
(iii) f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur V

Remarque 17: Si $f:U\to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, alors $d_xf:E\to F$ est un isomorphisme et $(d_xf)^{-1}=d_{f(x)}f^{-1}$

Théorème 18: (d'inversion locale) Soit $\emptyset\neq U\subseteq E$ ouvert, $f:U\to F$ application de classe $\mathcal{C}^k$, $x_0\in U$ tel que $d_{x_0}f:E\to F$ est un isomorphisme
Alors: $\exists U'\in\mathcal{V}_{x_0} \mid \exists V'\in\mathcal{V}_{y_0=f(x_0)} \mid f_{|U'}:U'\to V'$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme
De plus, $\forall y\in V'$, $d_y f^{-1}=\frac{1}{d_{f^{-1}(y)}f}$

Remarque 19: d_xf inversible $\iff \mathrm{Jac}(f)(x)\neq0$

[Zq]

Application 20: L'application $\exp: \begin{array}{l}\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to GL_n(\mathbb{C})\\ A\mapsto\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}\end{array}$ est surjective.

VI.4 [El Am]

Théorème 21: (d'inversion globale) Soit $U\subseteq E$ ouvert, $f:U\to F$ tq: f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, f est injective, $\forall x\in U$, d_xf est inversible,
Alors: $f(U)$ est un ouvert de F et $f:U\to f(U)$ est un $\mathcal{C}^k$-difféo

VI.4 [El Am]

Exemple 22: Soit $f: \begin{array}{l}\mathbb{R}_+^*\times]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}^2\\ (r;\theta)\mapsto(r\cos(\theta);r\sin(\theta))\end{array}$. f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et $f^{-1}: \begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+^*\times]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\\ (x;y)\mapsto(\sqrt{x^2+y^2};\arctan(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}))\end{array}$

Corollaire 23: Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle, $f:I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, f' ne s'annulant pas sur I
Alors: $f(I)$ est un intervalle ouvert et $f:I\to f(I)$ est un $\mathcal{C}^k$-difféo.

Exemple 24: $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ et $\ln:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ sont des $\mathcal{C}^\infty$-difféos.

[Zq]

Remarque 25: En pratique, montrer l'injectivité de f revient souvent à calculer f^{-1} et le théorème perd alors tout son intérêt. Le théorème suivant se passe de l'injectivité au prix d'une condition sur le comportement de f en l'infini.

Définition 26: Une application $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est dite propre si pour tout $K\subseteq\mathbb{R}^n$ compact, $f^{-1}(K)$ est compact ce qui équivaut à écrire $\|f(x)\|\xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{}+\infty$.

Théorème 27: (d'Hadamard-Lévy) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Alors: f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ ssi f est propre et $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $d_xf\in GL(\mathbb{R}^n)$.

III) Utilisation pour caractériser les sous-variétés

1) Notion de sous-variété

VI.5 [El Am]

Définition 28: Soit $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ouvert, $a\in U$, $f:U\to\mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$. On dit que f est une submersion en a si d_af est une surjection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$ (en particulier, $n\geq p$)

Exemple 29: $f(x;y)=x^2+y^2-1$ est une submersion en tout $(x;y)\neq(0;0)$.

Définition 30: Une partie $M\subseteq\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^n$ si $\forall x\in M$, $\exists U_x\in\mathcal{V}_x \mid \exists f:U_x\to\mathbb{R}^{n-d}$ de classe $\mathcal{C}^k$, $\exists y_0\in\mathbb{R}^{n-d} \mid \begin{cases}U_x\cap M=f^{-1}(\{y_0\})\\ d_xf\in\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n-d})\text{ est surjective}\end{cases}$

VI.5 [ElAm]

Exemple 31 : (1) Les sous-variétés de dimension n de $\mathbb{R}^n$ sont les ouverts de $\mathbb{R}^n$

(2) Par théorème d'inversion locale, les sous-variétés de dimension 0 de $\mathbb{R}^n$ sont les sous-ensembles dont tous les points sont isolés ($\forall x\in M, \exists r_x\in\mathbb{R}_+^* \setminus M\cap B(x,r_x)=\{x\}$).

Définition 32 : Les sous-variétés de dimension 1 dans $\mathbb{R}^n$ sont appelées les courbes de $\mathbb{R}^n$, celles de dimension 2 sont appelées surfaces et celles de dimension $n-1$ sont les hypersurfaces.

Exemple 33 : $\mathbb{S}^n=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2=1\}$ est une hypersurface de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Le graphe d'une application $\mathcal{C}^k$ est une sous-variété.

Proposition 34 : Soit M sous-variété de dimension d, de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\Phi: U\to\mathbb{R}^p$ un $\mathcal{C}^l$-difféomorphisme sur son image.

Alors : $\Phi(M\cap U)=\emptyset$ ou $\Phi(M\cap U)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^p$ de dimension d, de classe $\mathcal{C}^{\min(k,l)}$

2) Caractérisation des sous-variétés

VI.5 [ElAm]

Théorème 35 : M est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$, de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ ssi $\forall x\in M, \exists U\in\mathcal{V}_x \setminus \exists V\in\mathcal{V}_0 \setminus \exists \Phi: U\to V$ un $\mathcal{C}^k$-difféo tel que $\Phi(x)=0$ et $\Phi(U\cap M)=V\cap(\mathbb{R}^d\times\{0_{n-d}\})$

Exemple 36 : $\Phi(x,y)=(\arctan(\frac{y}{x})\,;x^2+y^2-1)$ est un redressement pour $\mathbb{S}^1$.

Théorème 37 : (caractérisation locale par graphe) M est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ ssi $\forall x\in M$, $\exists U_x\in\mathcal{V}_x \setminus \exists U_1\in\mathcal{V}_{x_1}\subseteq\mathbb{R}^d \setminus \exists U_2\in\mathcal{V}_{x_2}\subseteq\mathbb{R}^{n-d}\setminus\exists\varphi_x: U_1\to U_2$ de classe $\mathcal{C}^k$ tq : $M\cap(U_1\times U_2)$ est le graphe de φ_x i.e.

$U_x\cap M=\{(y;\varphi_x(y)) \mid y\in V\}$

Définition 38 : On dit que $f:E\to F$ est un homéomorphisme si f est bijective, continue et si f^{-1} est continue.

VI.5 [ElAm]

Théorème 39 : (caractérisations par paramétrisations locales) M est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ ssi $\forall x\in M, \exists U\in\mathcal{V}_x \setminus \exists\Omega\subseteq\mathbb{R}^d\setminus\exists g:\Omega\to\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ tel que g est un homéomorphisme de Ω sur $M\cap U$ et $d_{g^{-1}(x)}g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^n$ est injective

Références:

[ElAm] Calcul Différentiel - El Amrani

[Zad] Un max de maths - Zavidovique

[ZQ] Éléments d'analyse - Zuily